Jürgen Dankert

Das Differenzenverfahren - kurze Einführung -

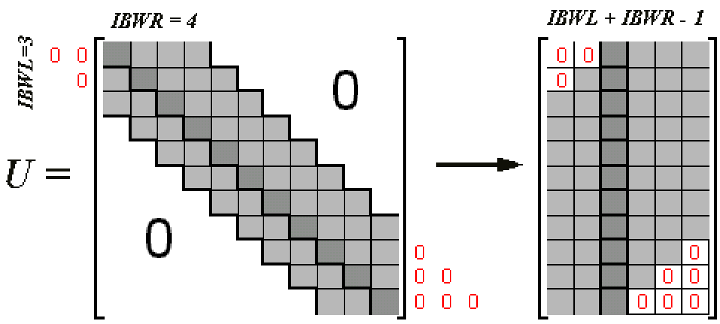
Eine besonders typische mathematische Modellierung einer physikalischen Gesetzmäßigkeit ist die Definition eines Rand- oder Anfangswertproblems: Die gesuchten Funktionen müssen eine Differenzialgleichung (oder ein Differenzialgleichungssystem) erfüllen, und an speziell vorgegebenen Punkten müssen sie (bzw. ihre Ableitungen) vorgeschriebene Werte annehmen (Rand- bzw. Anfangsbedingungen). Auch für relativ einfache Problemstellungen kann dies zu praktisch unüberwindlichen Schwierigkeiten führen, die Möglichkeit einer geschlossenen Lösung eines Rand- oder Anfangswertproblems ist in der technischen Praxis eher die Ausnahme als die Regel.

Für **lineare** Randwertprobleme (auch mit partiellen Differenzialgleichungen) ist das **Differenzenverfahren** ein beinahe universell anwendbares Verfahren. Es basiert auf der Idee, die Differenzialquotienten in den Differenzialgleichungen und den Randbedingungen durch Differenzenquotienten zu ersetzen. Die Differenzenquotienten werden nur für ausgewählte Punkte (**Stützstellen**) aufgeschrieben, so dass schließlich die Differenzialgleichungen und die Randbedingungen durch ein Gleichungssystem ersetzt werden, dessen Lösung die gesuchten Funktionswerte (natürlich nur an den Stützstellen) liefert.

Um den mit diesem Vorgehen unvermeidlich verbundenen Fehler in Grenzen zu halten, müssen die Stützstellen möglichst nah beieinander liegen, was zwangsläufig auf ein entsprechend großes Gleichungssystem führt.

> Das Differenzenverfahren ist prinzipiell auf jedes Randwertproblem anwendbar. **Praktikabel** ist es **nur für lineare Randwertprobleme**, weil sonst die Lösung des (nichtlinearen) Gleichungssystems zu unüberwindlichen Schwierigkeiten führt.

Weil in die Differenzenquotienten stets nur einige Funktionswerte an den Nachbarpunkten eingehen, ist die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems nur dünn mit von Null verschiedenen Elementen besetzt ("Sparse Matrix"). Bei geschickter Wahl der Reihenfolge für die Gleichungen kann die Koeffizientenmatrix sogar eine ausgeprägte Bandstruktur aufweisen (nur in einem schmalen Band rechts und links von der Hauptdiagonalen befinden sich von Null verschiedene Elemente). Dies kann bei der Lösung mit Vorteil für Speicherbedarf und erforderliche Rechenzeit genutzt werden.



Kompakte Speicherung einer unsymmetrischen Bandmatrix

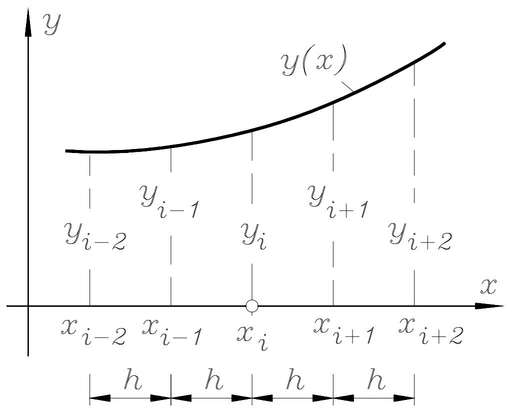
Hier wird das Differenzenverfahren nur am Beispiel der Ermittlung von Biegelinien für gerade Träger behandelt. Das Vorgehen ist exemplarisch für beliebige andere lineare Randwertprobleme. Das Verfahren ist für das genannte Problem im Abschnitt 18.1 in "Dankert/Dankert: Technische Mechanik" ausführlich beschrieben (in den Abschnitten 19.2 und 19.3 wird auch die Anwendung auf andere lineare Randwertprobleme demonstriert). Deshalb werden nachfolgend nur die wichtigsten Formeln zusammengestellt.

Zentrale Differenzenformeln

Die Abszisse $\boldsymbol{x}$ wird äquidistant (Abstand $\boldsymbol{h}$) unterteilt (nebenstehende Skizze). Dann kann der Differenzialquotient als Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

an der beliebigen Stützstelle $\boldsymbol{i}$ (bei $\boldsymbol{x_i}$) angenähert werden. Für die ersten vier Ableitungen der Funktion $\boldsymbol{y}\,(\boldsymbol{x})$ erhält man die folgenden (wegen ihrer Symmetrie zur Stützstelle $\boldsymbol{i}$ als "zentral" bezeichneten) Näherungsformeln.



Zentrale Differenzenformeln:

$$y_i' \approx \frac{1}{2h}\left(-y_{i-1} + y_{i+1}\right) ,$$

$$y_i'' \approx \frac{1}{h^2}\left(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}\right) ,$$

$$y_i''' \approx \frac{1}{2h^3}\left(-y_{i-2} + 2y_{i-1} - 2y_{i+1} + y_{i+2}\right) ,$$

$$y_i'''' \approx \frac{1}{h^4}\left(y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}\right) .$$

Die Differenzenformeln stellen in dieser Form eine recht einfache Näherung für die Differenzialquotienten dar. Sogenannte "höhere Differenzenformeln", die durch das Einbeziehen weiterer Nachbarpunkte eine bessere Näherung ergeben würden (es werden mehr Glieder der Taylorreihen-Entwicklung der Funktion berücksichtigt), sind für die praktische Anwendung jedoch weniger geeignet, weil an den Rändern mehr "Außenpunkte" in die Rechnung hineinkommen, für die dann keine zusätzlichen Gleichungen aus den Randbedingungen mehr verfügbar sind.

Biegelinie des geraden Trägers

Die Differenzialgleichung der Biegelinie eines geraden Trägers mit veränderlichem Querschnitt wird mit Hilfe der zentralen Differenzenformeln durch folgende Differenzengleichung angenähert.

Differenzenschema für die Differenzialgleichung $[EI\,v''(z)]'' = q(z)$:

$$I_{i-1}\,v_{i-2} - 2\left(I_{i-1} + I_i\right)v_{i-1} + \left(I_{i-1} + 4\,I_i + I_{i+1}\right)v_i$$
$$- 2\left(I_i + I_{i+1}\right)v_{i+1} + I_{i+1}\,v_{i+2} = \frac{q_i\,h^4}{E} \quad .$$

In die Randbedingungen dieser Differenzialgleichung vierter Ordnung können Aussagen über das Biegemoment und die Querkraft eingehen. Die für diese beiden Größen geltenden Differenzialbeziehungen

$$M_b = -\,EI\,v'' \qquad \textit{und} \qquad F_Q = -\,(EI\,v'')'$$

werden ebenfalls durch Differenzenformeln genähert:

Schnittgrößen in Differenzenschreibweise bei veränderlicher Biegesteifigkeit

$$M_{bi} = -\,\frac{EI_i}{h^2}\left(v_{i-1} - 2\,v_i + v_{i+1}\right) \quad ,$$

$$F_{Qi} = -\,\frac{E}{2h^3}\left[-I_{i-1}\,v_{i-2} + 2\,I_{i-1}\,v_{i-1} - \left(I_{i-1} - I_{i+1}\right)v_i - 2\,I_{i+1}\,v_{i+1} + I_{i+1}\,v_{i+2}\right]$$

Für konstantes ***EI*** vereinfachen sich die Formeln zu den

Differenzenformeln bei konstanter Biegesteifigkeit:

$$v_{i-2} - 4\,v_{i-1} + 6\,v_i - 4\,v_{i+1} + v_{i+2} = \frac{q_i\,h^4}{EI} \quad ,$$

$$M_{bi} = -\,\frac{EI}{h^2}\left(v_{i-1} - 2\,v_i + v_{i+1}\right) \quad ,$$

$$F_{Qi} = -\,\frac{EI}{2h^3}\left[-\,v_{i-2} + 2\,v_{i-1} - 2\,v_{i+1} + v_{i+2}\right] \quad .$$

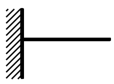
Für konstante Biegesteifigkeit kann das Gleichungssystem (vgl. "Dankert/Dankert: Technische Mechanik", Seite 263) stets in folgender Form aufgeschrieben werden:

$$
\begin{bmatrix}
x & x & x & x & & & & & & & & \\
x & x & x & x & x & & & & & & & \\
1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & & & & & & \\
0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & & & & & \\
 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \\
 & & & & & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \\
 & & & & & & & y & y & y & y & y \\
 & & & & & & & & y & y & y & y
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n_A+5}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
x \\ x \\ \kappa_3/n_A^4 \\ \vdots \\ \vdots \\ \kappa_{n_A+3}/n_A^4 \\ y \\ y
\end{bmatrix}
\frac{q_0 l^4}{E I}
$$

Darin ist $\boldsymbol{n_A}$ die Anzahl der Abschnitte, in die die Trägerlänge unterteilt wird (es ergeben sich $\boldsymbol{n = n_A + 5}$ Gleichungen), $\boldsymbol{q_0}$ ist eine beliebige "Bezugs-Linienlast", mit der die Linienlast-Intensität eines beliebigen Punktes $\boldsymbol{i}$ als $\boldsymbol{q_i = \kappa_i\, q_0}$ aufgeschrieben wird.

Die wichtigsten Randbedingungen für konstantes $\boldsymbol{EI}$ lauten in Differenzenschreibweise:

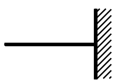
Freier Rand:
$$
\begin{bmatrix}
0 & 1 & -2 & 1 & & & \\
-1 & 2 & 0 & -2 & 1 & &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$


$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & & & \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$


$$
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & & & \\
0 & 1 & -2 & 1 & 0 & &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Randbedingungen am linken Trägerrand (Gleichungen **1** und **2**)

Freier Rand:
$$
\begin{bmatrix}
 & & -1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\
 & & & 1 & -2 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_{n_A+4} \\ v_{n_A+5} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$


$$
\begin{bmatrix}
 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & -1 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_{n_A+4} \\ v_{n_A+5} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$


$$
\begin{bmatrix}
 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & 1 & -2 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_{n_A+4} \\ v_{n_A+5} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Randbedingungen für den rechten Trägerrand (Gleichungen $\boldsymbol{n}$ **-1** und $\boldsymbol{n}$)

"Tricks", wie Einzellasten, Zwischenstützen, Federn, Gelenke und weitere spezielle Randbedingungen realisiert werden können, finden sich in "Dankert/Dankert: Technische Mechanik" auf den Seiten 263 bis 265, 268 und 301 bis 302.

Empfehlungen für das Arbeiten mit MATLAB

Es sollte ein MATLAB-Script verwendet werden, das so allgemein gehalten ist, dass es als Muster für möglichst viele Aufgabentypen dienen kann, insbesondere

- ♦ sollte die Differenzengleichung für den elastisch gebetteten Träger verwendet werden (der "normale" Biegeträger ist als Sonderfall mit Bettungsziffer $\boldsymbol{k = 0}$ enthalten, und diskrete Federn können besonders einfach einbezogen werden),
- ♦ sollten die Formeln für veränderliche Biegesteifigkeiten (sowohl für die Standardgleichungen als auch für die Randbedingungen) verwendet werden (vgl. das Musterscript, das man unter www.JuergenDankert.de/TM2 bei Aufgabe 18-10 findet),
- ♦ sollte für die Lösung des Gleichungssystems das Script **gabamp.m** verwendet werden, um bei komplizierteren Problemen die möglicherweise sehr großen Gleichungssysteme zu beherrschen (vgl. hierzu unter www.DankertDankert.de die Ergänzung zu Seite 261 und das o. g. Musterscript zur Aufgabe 18-10).

Bei veränderlicher Biegesteifigkeit ist es empfehlenswert, ein "Bezugs-Trägheitsmoment" $\boldsymbol{I_0}$ zu definieren und damit die Biegesteifigkeit am Punkt $\boldsymbol{i}$ in der Form

$$\boldsymbol{EI_i} = \mu_i \, \boldsymbol{EI_0}$$

aufzuschreiben. Dann kann $\boldsymbol{EI_0}$ aus allen Gleichungen wieder ausgeklammert (und auf die rechte Seite des Gleichungssystems gebracht) werden, und die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems bleibt dimensionslos. Damit werden numerische Probleme bei der Lösung des Gleichungssystems vermieden, die entstehen, wenn bei sehr großer Biegesteifigkeit die Koeffizienten der Differenzengleichungen in ganz anderen Größenordnungen liegen als die Koeffizienten der Randbedingungsgleichungen.

Unter Berücksichtigung all dieser Hinweise wird also folgende Differenzialgleichung durch ihre Differenzengleichung im Matlab-Script vertreten (vgl. "Dankert/Dankert: Technische Mechanik", Kapitel 19.2):

Elastisch gebetteter Träger $[EI(z)\,v''(z)]'' + k(z)\,v(z) = q(z)$:

$$\mu_{i-1} v_{i-2} - 2\left(\mu_{i-1} + \mu_i\right) v_{i-1} + \left(\mu_{i-1} + 4\,\mu_i + \mu_{i+1} + \frac{k_i h^4}{EI_0}\right) v_i$$
$$- 2\left(\mu_i + \mu_{i+1}\right) v_{i+1} + \mu_{i+1} v_{i+2} = \frac{q_i h^4}{EI_0}$$

Die Schnittgrößen werden durch folgende Differenzengleichungen abgebildet:

Biegemoment und Querkraft

$$M_{bi} = -\frac{EI_0}{h^2}\left(\mu_i v_{i-1} - 2\mu_i v_i + \mu_i v_{i+1}\right) \quad ,$$

$$F_{Qi} = -\frac{EI_0}{2h^3}\left[-\mu_{i-1} v_{i-2} + 2\mu_{i-1} v_{i-1} - \left(\mu_{i-1} - \mu_{i+1}\right) v_i - 2\mu_{i+1} v_{i+1} + \mu_{i+1} v_{i+2}\right] \quad .$$

Wenn sich die Faktoren vor den Klammern bei den Schnittgrößen nicht ohnehin herauskürzen, sollten sie in den Randbedingungsgleichungen auf die rechte Seite gebracht werden.

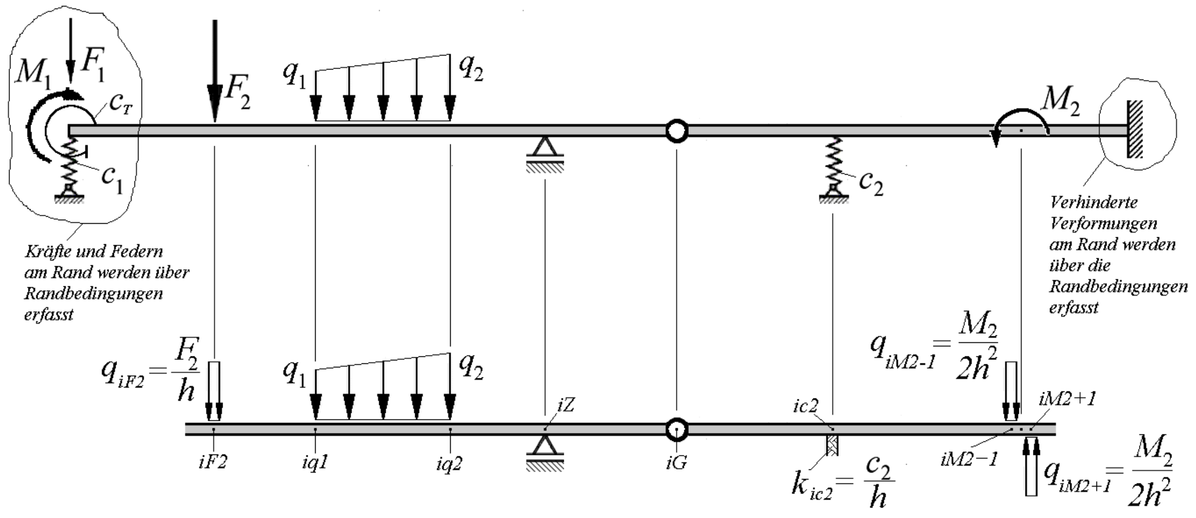
Im Matlab-Script sollten also vor dem Aufbau des Gleichungssystems drei Vektoren mit Werten für alle Stützpunkte bereitgestellt werden:

- Ein Vektor **qi** enthält die Linienlastintensitäten q_i für alle Stützpunkte i. Darin sollten auch alle "verschmierten" Einzelkräfte und -momente (siehe nachfolgende Erläuterungen) aufgenommen werden.
- Ein Vektor **ki** enthält die Bettungsziffern k_i für alle Stützpunkte i (bei nicht gebetteten Trägern ist es ein Nullvektor). Darin sollten auch alle "verschmierten" diskreten Federn (siehe nachfolgende Erläuterungen) aufgenommen werden.
- Ein Vektor **mi** enthält die Werte μ_i für alle Stützpunkte i, die sich mit dem beliebig festzulegenden Bezugs-Flächenträgheitsmoment I_0 aus dem Quotienten $(EI_i)/(EI_0)$ errechnen. Mit diesen Werten werden auch Gelenke modelliert (siehe nachfolgende Erläuterungen).

Die beiden ersten und die beiden letzten Gleichungen sollten für die Randbedingungen reserviert werden.

An den Rändern angreifende Federn, Einzelkräfte und -momente sollten grundsätzlich **nur über die Randbedingungen** in die Rechnung einfließen. Fertige Formeln für eine Reihe von Varianten am linken bzw. rechten Rand findet man in "Dankert/Dankert: Technische Mechanik" auf den Seiten 301 und 302 (ein mit Matlab berechnetes Beispiel, das fast alle Varianten möglicher Randbedingungen enthält, findet man unter www.JuergenDankert.de/TM2 als Aufgabe 18-13).

Dagegen sollten Federn, Einzelkräfte und -momente, die nicht am Rand angreifen, und Zwischenstützen und Gelenke mit den kleinen "Tricks" in die Rechnung einfließen, die nachfolgend beschrieben werden.



Effektive Realisierung verschiedener Zwischenbedingungen

Man sollte darauf achten, dass der Träger so diskretisiert wird, dass alle markanten Punkte (z. B. die Angriffspunkte diskreter Lasten, Federn, Zwischenstützen und Punkte, an denen sich Gelenke befinden) mit einem Stützpunkt für das Differenzenverfahren zusammenfallen.

Der Träger mit der Gesamtlänge $\boldsymbol{l_{ges}}$ sei (wie oben bereits beschrieben) in $\boldsymbol{n_A}$ äquidistante Abschnitte der Breite $\boldsymbol{h}$ unterteilt. Weil der linke Randpunkt des Trägers (wegen der beiden Außenpunkte) die Punktnummer 3 hat, gilt für einen Punkt P im Abstand $\boldsymbol{l_P}$ vom linken Rand eines Trägers die Punktnummer $\boldsymbol{i_P}$, die mit folgendem Matlab-Befehl erzeugt wird (dabei wird die *round*-Function benutzt, um garantiert einen ganzzahligen Wert zu bekommen):

```
ip = round (nA*lP/lges + 3) ;
```

Die Vektoren **qi** (Linienlastintensitäten), **ki** (Bettungsziffern) und **mi** (Biegesteifigkeiten/Bezugssteifigkeit) werden für alle Stützpunkte mit Nullen initialisiert und danach folgendermaßen modifiziert:

- **Linienlasten** werden mit ihren Intensitäten an den einzelnen Stützpunkten in den Vektor **qi** eingetragen. In dem skizzierten Beispiel mit einer Trapezlast, die vom Punkt **iq1** bis zum Punkt **iq2** wirkt und dabei ihre Intensität von $\boldsymbol{q_1}$ auf $\boldsymbol{q_2}$ ändert, kann dies z. B. mit folgender Matlab-Anweisung realisiert werden:

```
qi(iq1:iq2) = q1 : (q2-q1)/(iq2-iq1) : q2 ;
```

- **Einzelkräfte** werden über die Breite $\boldsymbol{h}$ "verschmiert" (vgl. "Dankert/Dankert: Technische Mechanik", Seiten 264 und 301). Im skizzierten Beispiel bedeutet dies für die am Punkt **iF2** angreifende Kraft $\boldsymbol{F_2}$, dass daraus eine nur am Punkt **iF2** wirkende Linienlast wird:

```
qi(iF2) = F2/h ;
```

- **Einzelmomente** werden zunächst durch ein statisch gleichwertiges Kräftepaar ersetzt (die beiden Kräfte greifen am linken bzw. rechten Nachbarpunkt an). Danach werden beide Kräfte jeweils über die Breite $\boldsymbol{h}$ "verschmiert" (vgl. "Dankert/Dankert: Technische

Mechanik", Seite 264). Im skizzierten Beispiel bedeutet dies für das am Punkt **iM2** angreifende Moment M_2, dass daraus zwei an den Punkten **iM2-1** bzw. **iM2+1** wirkende Linienlasten werden, von denen eine ein negatives Vorzeichen bekommt (in diesem Fall entsprechend der Drehrichtung des Moments die rechte Linienlast):

```
qi(iM2-1) =   M2/(2*h^2) ;
qi(iM2+1) = - M2/(2*h^2) ;
```

- Eventuell vorhandene **Strecken mit elastischer Bettung** werden durch Eintragen der Bettungsziffern in den Vektor **ki** an allen gebetteten Stützpunkten erfasst.
- **Diskrete Federn** werden über die Breite h "verschmiert" (vgl. "Dankert/Dankert: Technische Mechanik", Seite 301). Im skizzierten Beispiel bedeutet dies für die am Punkt **ic2** angreifende Feder c_2, dass daraus eine nur am Punkt **ic2** wirkende Bettung wird:

```
ki(ic2) = c2/h ;
```

- **Zwischenstützen** können näherungsweise wie Federn erfasst werden, indem man eine Feder mit außerordentlich großer Federzahl anbringt (vgl. "Dankert/Dankert: Technische Mechanik", Seite 301). Im skizzierten Beispiel bedeutet dies für die am Punkt **iZ** angebrachte Zwischenstütze, dass daraus eine nur am Punkt **iZ** wirkende Bettung mit sehr großer Bettungsziffer wird, z. B.:

```
ki(iZ) = 1e30 ;
```

  Besser ist jedoch die Realisierung von Zwischenstützen in der nachfolgend für "vorgeschriebene Verschiebungen" genannten Strategie.
- Der Vektor **mi** muss für alle Stützpunkte mit den Quotienten $(EI_i)/(EI_0)$ aufgefüllt werden (Achtung: "Vergessene" Steifigkeiten führen wie nicht ausreichende Lagerung des Trägers zu singulären Koeffizientenmatrizen des linearen Gleichungssystems).
- **Gelenke** werden berücksichtigt, indem für den einen Punkt, an dem das Gelenk angebracht ist, die Biegesteifigkeit gleich Null gesetzt wird. Im skizzierten Beispiel bedeutet dies für das am Punkt **iG** angebrachte Gelenk, dass nur am Punkt **iG** die Steifigkeit Null ist:

```
mi(iG) = 0 ;
```

Vorgeschriebene Verschiebungen an einem Punkt (dem Punkt **iP** wird eine Vertikalverschiebung v_P aufgezwungen) sollten nicht über die oben beschriebenen Vektoren realisiert werden (es geht auch, weil es aber nicht empfohlen wird, soll hier nicht verraten werden, wie es geht). Man sollte vorgeschriebene Verschiebungen erst **nach dem Aufbau des Gleichungssystems** einbauen, indem man eine Verschiebung v_P am Punkt **iP** dadurch realisiert, dass man alle Elemente außer dem Hauptdiagonalelement der **iP**-ten Zeile in der Koeffizientenmatrix gleich **0** setzt, das Hauptdiagonalelement erhält den Wert **1**, und das **iP**-te Element im Vektor der rechten Seite erhält den Wert v_P.

Es ist empfehlenswert, auf analoge Weise **Zwischenstützen** zu realisieren, die ja nichts anderes sind als eine "vorgeschriebene Verschiebungen der Größe Null".